

**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**  
**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO**  
**INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL II - EN - 18 de Junho 2018 – 2 horas**

1. (5 val.) Considere para um projecto a seguinte rede, com as durações em semanas:

Activ.	Act. Prec.	Dur.optimista	Dur. Mais Provável	Dur. Pessimista
A	-	7	9	17
B	-	8	10	12
C	A	5	6	7
D	A,B	6	8	10
E	C	4	5	6
F	C,D	4	6	8
G	E,F	10	13	16
H	F	5	7	9
I	E,H	3	6	9

- a) (2,0 valores) Estabeleça o gráfico da rede e determine o caminho crítico, indicando para as durações médias as margens das actividades;
- b) (1,5 valores) Determine uma duração que seja cumprida com 95% de probabilidade. Comente criticamente essa duração;
- c) (1,5 valores) Suponha que a actividade E foi decomposta em duas partes, mas em que a primeira parte, E1 é precedida também por D e a segunda parte, E2, é precedida para além de E1 também de F. Faça as alterações na rede.

2. Duas empresas do mesmo tipo, A e B, querem promover os seus produtos e recebem ambas uma oferta de um canal de TV; podem passar o seu anúncio à tarde (cerca de 40% dos telespectadores desta cadeia assistem à TV nesta nesta faixa horária) ou à noite (com uma audiência de 60%), mas não nas duas faixas horárias simultaneamente; sabe-se ainda que não há sobreposição entre os telespectadores das duas faixas horárias. Se as duas anunciarem na mesma faixa horária, cada uma vai vender os seus produtos a 30% dos telespectadores dessa faixa, mas a nenhum da outra, ao passo que se anunciarem em faixas diferentes, cada um capatará 50% da audiência da respectiva faixa.

- a) (1,5 valores) Identifique o jogo, caracterize-o e apresente a matriz de resultados;
- b) (2,5 valores) Supondo que cada empresa mantém as suas decisões secretas, verifique se existe solução de equilíbrio recomendável para cada uma. Verifique se existe ponto de equilíbrio em estratégias mistas e interprete-o. Comente os valores obtidos, (\*)
- c) (1,5 valores) Suponha que era responsável pela empresa e tinha liberdade de abordar a outra empresa (não está vedada a possibilidade de cooperação). Que decisão proporia? Justifique.

3. (5 val.) Uma empresa metalomecânica estabeleceu um contrato de fornecimento de certo produto para os próximos cinco meses. As quantidades a fornecer, no início de cada mês, são as seguintes:

(\*) se não resolver a alínea a), considere a bimatrix

		T	N
A	T	6;6	10;15
A	N	15;10	9;9

Mês:	1	2	3	4	5
Quantidade:	80	70	110	90	100

Este produto é fabricado por lotes, sendo de 250 € o custo de lançamento. O custo unitário do produto é de 100 €. A empresa utiliza uma taxa de posse de 12% ao ano, sendo o custo de uma fracção do ano proporcional (o custo de stock é função do stock final, que fica de um mês para o seguinte). Neste momento não existem unidades em armazém e nem se pretende que fiquem unidades no fim do período, não havendo obrigatoriedade de stocks nos meses intermédios.

- a) **(2,0 valores)** Estabeleça o programa de produção, utilizando a heurística de Silver-Meal, indicando o custo total;
- b) **(3,0 valores)** Resolva o mesmo problema utilizando o algoritmo Wagner-Whithin e compare os resultados. Comente.
4. Um “stand” de automóveis vende três tipos de veículos: city car, berlina e desportivo. O vendedor trabalha à comissão, sendo a sua remuneração variável em função dos veículos vendidos. De acordo com os dados passados, as vendas por semana são uma v.a. binomial com  $p = 0,5$  e  $n = 4$ :  $B(x; 0,5; 4)$ .

Se o veículo é do tipo city car, a comissão é de 400 €. Se é do tipo berlina, a comissão depende do tipo de modelo, sendo 50% das vezes de 400 € e nos restantes casos 500 €. Para os carros desportivos, há também dois tipos de comissão: 800 € em 60% das vezes e 1000 em 40% das vezes. A distribuição do tipo de veículo vendido é a seguinte:

<b>veículo:</b>	<b>city car</b>	<b>berlina</b>	<b>desportivo</b>
<b>probabilidade</b>	<b>0,40</b>	<b>0,50</b>	<b>0,10</b>

- a) **(1,5 valores)** Gere valores para as v.a. envolvidas considerando os NPA indicados abaixo e designe o seu significado prático;
- b) **(3,0 valores)** Com base nos valores gerados na linha anterior, simule o comportamento do sistema durante três semanas, indicando o ganho médio do vendedor por semana e o ganho médio por veículo.

Obs. Considere por ordem os seguintes NPA:

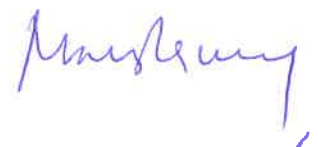
Vendas semanais: 0,78; 0,29; 0,93; 0,46; 0,82; 0,12; 0,07; 0,24; 0,60; 0,56; 0,33; 0,18

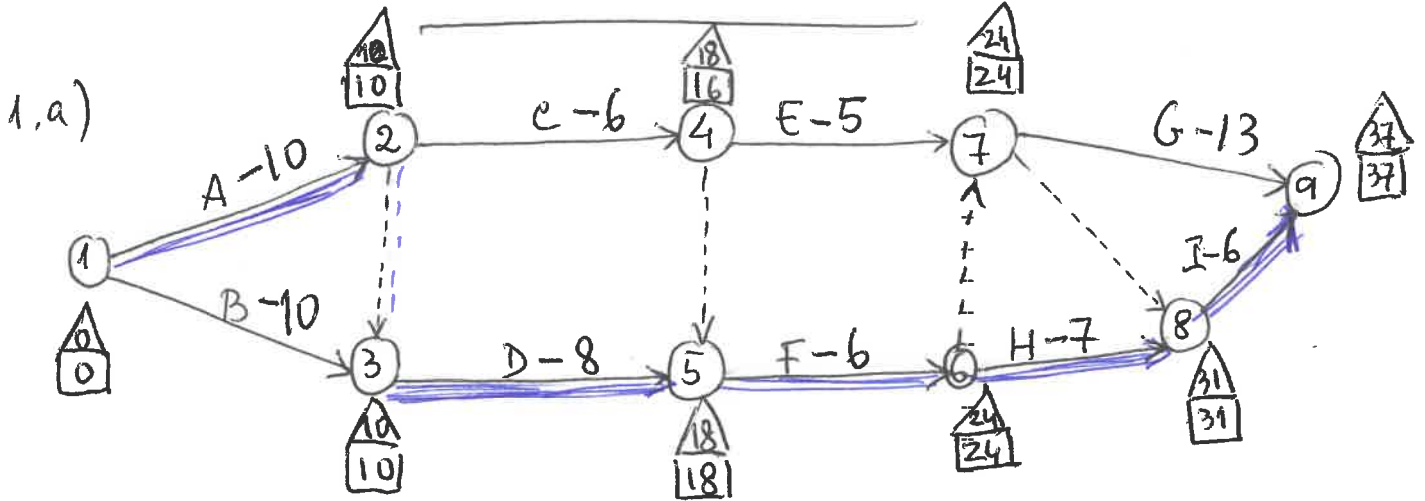
Tipo de veículo: 0,43; 0,67; 0,17; 0,97; 0,12; 0,22

Comissão Berlina: 0,28; 0,45; 0,55; 0,71; 0,07; 0,19

Comissão desportivo: 0,35; 0,05; 0,85; 0,41; 0,11; 0,48

O professor





Act.	A	B	C	D	E	F	G	H	I
MT	0	0	2	0	3	0	0	0	0

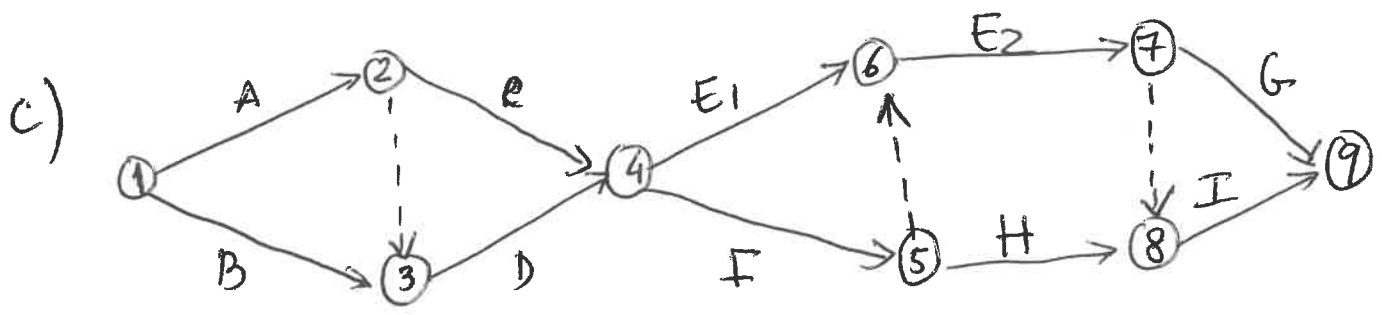
Caminho crítico = {A, fict., D, F, H, I} com duração 37 e variância 5,11

Nota. aparentemente há vários caminhos críticos, mas a menor duração medz. Mas este tem a maior variância, bastando notar que a variância de A é superior à de B e variância de soma de H em I é superior à de G (sem fazer contas)

b)  $\sigma_{Tcc}^2 = \frac{100}{36} + \frac{16}{36} + \frac{16}{36} + \frac{16}{36} + \frac{36}{36} = \frac{184}{36} = 5,111$

$\sigma_{Tcc} = \sqrt{5,111} = 2,26$

$P(T_{cc} \leq a) = 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-37}{2,26}\right) = 0,95 \Rightarrow a \approx 41$



2.

		T	N
a) A	T	12;12	20;30
	N	30;20	18;18

Jogo de 2 pessoas, soma não constante, finito, informação completa, estático. Pode ser cooperativo ou não cooperativo. Note, elementos de simetria são percentagem de espectadores que compram os produtos das empresas, que assiste de tarde e de noite

b) Decisões secretas significa Não Cooperar.  
 $(T; N) = (20; 30)$  e  $(N; T) = (30; 20)$  são pontos de Nash  
 (equilíbrio) em estratégias puras.

Ponto de equilíbrio em estratégias mistas:

$$\begin{aligned}
 A: \quad 12y + 20(1-y) &= -8y + 20 &\Rightarrow & -8y + 20 = 12y + 18 \\
 30y + 18(1-y) &= 12y + 18 &\Rightarrow & 20y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

idem para empresa B

$(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$  é ponto de Nash em estratégias mistas para B

$(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$  " " " " " " " " " " " " " " " " A

$$\begin{aligned}
 \text{Valor esperado para cada um} &= 12 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + 20 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{30 \times 9}{10} \times \frac{1}{10} + \\
 &+ 18 \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{1920}{100} = 19,2
 \end{aligned}$$

c) Passamos a promover um jogo cooperativo.  
 Podemos utilizar a metodologia dos jogos cooperativos,  
 instruindo a f. característica e determinando por  
 exemplo o valor de Shapley ou o Núcleo. Mas o  
 exemplo é muito simples (só dois jogadores) e  
 basta combinarem serem em turnos diferentes  
 atendo o valor de 50 a dividir pelos dois.  
 Uma solução prática seria metade do tempo uma sempre  
 fazer T e a outra N e na outra metade trocar.  
 Se o canal de TV não aceitar mudanças, a que  
 ficar de Norte transfere um montante, a negociar,  
 para a outra. Um solução equilibrada seria  
 transferir 5, ficando em 25 cada.

Obs. Qualquer solução que distribua 50 e cada  
 um recebe pelo menos 20 é um jogo não  
 dominado.

3 a)

Periodo	Prognose	Ausstattung	C. unitária
1	80	250	250
2	150	320	160*
3	260	540	180*

$Q_1^* = 150$ ;  $Q_2^* = 0$  Entomender em 1 para 1 e 2

Periodo	Prognose	Ausstattung	C. unitária
3	110	250	250
4	200	340	170*
5	300	540	180

$Q_3^* = 200$   $Q_4^* = 0$   $Q_5^* = 100$

Ausstattung =  $Q_1 = 750 + 160$   
(dem afundig)

C. Afundig =  $(80 + 70 + 110 + 90 + 100) * 100 = 45000$   
C. unidade C. slide

b) Período 1 : 80  $c_1(Q_1) + h S_2$

$S_2$	$h S_2$	$c_1(Q_1) = 250$	$Q_1 = 80$	150	260	$c_{T_1}(S_2)$	$Q_1^*$
0	0	250	—	—	—	250	80
70	70	—	320	—	—	320	150
180	180	—	—	—	430	430	260

Período 2 : 70

$S_3$	$h S_3$	$c_2(Q_2) = 250$	$Q_2 = 70$	180	270	$c_{T_2}(S_3)$	$Q_2^*$
0	0	320	500	—	—	320	0
110	110	540	—	610	—	540	0
200	200	—	—	—	700	700	270

Período 3: 110

		$C_3(Q_3) + h S_4$			$CT_3(S_4)$	$Q_3^*$
$S_4$	$h S_4$	$Q_3=0$ $c(Q_3)=0$	110	200		
0	0	540	580	-	540	0
90	90	790	-	660	760	200
190	190	-	-	760	760	300

Período 4: 90

		$C_4(Q_4) + h S_5$			$CT_4(S_5)$	$Q_4^*$
$S_5$	$h S_5$	$Q_4=0$ $c(Q_4)=0$	90	190		
0	0	660	690	-	660	0
100	100	860	-	890	860	0

Período 5: 100

		$C_5(Q_5) + h S_6$			$CT_5(S_6)$	$Q_5^*$
$S_6$	$h S_6$	$Q_5=0$ $c(Q_5)=0$	100	250		
0	0	860	910	-	860	0

$Q_5^* = 0$      $Q_4^* = 0$      $Q_3^* = 300$      $Q_2^* = 0$      $Q_1^* = 150$

Custo total =  $500 + 70 + 190 + 100 = 860$   
(sem afundição)     $\underbrace{\hspace{10em}}_{c. Env.}$      $\underbrace{\hspace{10em}}_{c. Stock}$

$C. Aquático = 45000$

4. a) vendas semanais :  $1^a - 2$  ;  $2^a - 1$  ;  $3^a - 2$   
 tipos de veículos :  $1^a - berline, berline$  ;  $2^a - city car$  ;  $3^a - desportivo, city car$   
 comissão :  $1^a$  semana -  $1^o$  berline - 400 ;  $1^a$  semana -  $2^o$  berline - 500 ;  
 $2^a$  semana - city car - 300 ;  $3^a$  semana - desportivo - 800 ;  
 $3^a$  semana - city car - 300

b) Prados Simulados

Genes semen	Prados Simulados	Who Simulados	Compart	Grado	Genes Simulados
1	2	berline	400	400	400
		berlin	500	500	900
2	1	city car	300	300	1200
3	2	despota	800	800	2000
		city car	900	900	2900

Genes/semen  $2400 \cdot 2300/3 \approx 767$

Genes (autómata)  $2300/5 = 460$

Prob (city car) =  $\frac{1}{5} = 0,2$   
despota

